

На правах рукописи

Филиппов Сергей Иванович

**УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛЕСНОГО ПРОФИЛЯ
В ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ С ГРАНИЦАМИ РАЗДЕЛА**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань – 2003

Работа выполнена в отделе гидромеханики Научно-исследовательского института математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор К.Е. Афанасьев

доктор физико-математических наук,
профессор, заслуженный деятель
науки РТ Л.М. Котляр

доктор физико-математических наук,
профессор Д.В. Маклаков

Ведущая организация: Институт гидродинамики
им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Защита состоится 18 декабря 2003 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан “___” _____ 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент

А.А. Саченков

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена решению задач теории подводного крыла с помощью развития аналитико-численных методов. В работе затронуты, как традиционная область волн малой амплитуды в рамках линейной и нелинейной теории, так и мало исследованная область больших скоростей движения в несжимаемой жидкости, когда деформация свободной поверхности может быть весьма значительной. В каждой из них рассмотрены или новые задачи, или известные задачи, решенные в диссертации благодаря применяемым методам в более полном объеме или при более точном отражении модели течения.

Актуальность темы. Изучение движения тел в поле силы тяжести вблизи границ раздела сред относится к числу актуальных проблем современной гидроаэродинамики, что в значительной мере связано с созданием транспортных средств: судов на подводных крыльях, экранопланов, использующих крылья в качестве несущих элементов и средств управления движением.

Результаты, представленные в данной диссертации, группируются вокруг двух основных направлений исследования. Первое направление связано с рассмотрением установившихся течений несжимаемой жидкости, в которой находится телесный контур произвольной формы, при наличии дополнительных факторов, усложняющих модель течения: поток с двумя границами раздела – свободной поверхностью, границей раздела жидкостей разной плотности и скорости течения, горизонтальной стенкой (дно или твердая крышка), в их различной комбинации с изучением поступательного и колебательного установившихся движений; учет наряду с силой тяжести силы поверхностного натяжения на свободной границе. В настоящее время решение задач теории подводного крыла с учетом дополнительных факторов моделирования потока – быстроразвивающаяся область исследований.

Второе направление, связанное с исследованием нелинейных поверхностных волн при обтекании подводного контура, представляет одно из традиционных направлений теории подводного крыла, нацеленное на как можно более точное выполнение граничных условий на профиле и свободной поверхности. Здесь основное внимание уделено рассмотрению движения контура произвольной формы в различных диапазонах числа Фруда и анализу нелинейных эффектов, учет влияния которых при малой

глубине погружения и больших скоростях движения актуален для более точного расчета гидродинамических характеристик.

Теоретическое значение и научная новизна работы определяются следующим:

– решены, в том числе новые, задачи обтекания профиля произвольной формы:

- в двухслойной жидкости при наличии горизонтального дна;
- под свободной поверхностью весомой жидкости конечной глубины;
- в канале с твердыми стенками;
- над и под границей раздела двух весомых жидкостей с верхним слоем, имеющим свободную поверхность;
- в трехслойной жидкости ступенчатой стратификации,

а также задачи с одной границей раздела;

– исследованы установившиеся колебания плоского контура в двухслойной ограниченной снизу жидкости и в открытом канале;

– решена задача обтекания подводного контура с образованием капиллярно-гравитационных поверхностных волн;

– разработан метод решения задач об установившихся движениях тела в многослойном потоке весомой жидкости;

– изучены нелинейные эффекты на свободной поверхности при обтекании гидропрофиля;

– исследовано движение подводного контура в весомой жидкости при больших числах Фруда и малых отстояниях до свободной поверхности на основе применения нового аналитико-численного метода.

Обоснованность и достоверность полученных результатов в рамках принятой модели идеальной несжимаемой жидкости обеспечиваются: применением строгих математических методов при построении аналитических решений, проведением внутренних проверок точности при численных расчетах, сравнением результатов вычислений с результатами других авторов и экспериментальными данными.

Практическая значимость. Полученные в диссертации результаты способствуют лучшему пониманию влияния различных типов границ раздела сред, их взаимодействия, сил весомости и капиллярности, разных типов движения, нелинейных эффектов на суммарные и распределенные гидродинамические характеристики подводного крыла. Эти результаты были использованы при выполнении хозяйственных работ с ЦНИИ им. А.Н. Крылова (Ленинград, 1988 – 1993 гг.) по проектированию подводных крыльев. Проведенные исследования получили финансовую поддержку

РФФИ (проекты 96-01-00111, 99-01-00169, 99-01-00173, 02-01-00836, 03-01-00015), программы “Университеты России” (2000 – 2001 гг.), фонда НИОКР АНТ (2000 – 2003 гг.).

Апробация работы. Результаты диссертации по мере их получения докладывались: на научной конференции “Математические проблемы аэрогидродинамики” (Москва, 1986), на II Республиканской конференции “Механика машиностроения” (Набережные Челны, 1987), на семинаре “Математические модели и их применение в судостроении” НТО им. акад. А.Н. Крылова (Ленинград, 1988), на научно-технической конференции “Крыловские чтения” (Ленинград 1985, 1988, 1993), на Всесоюзном совещании по численным методам в задачах волновой гидродинамики (Ростов-на-Дону, 1990), на VII Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Москва, 1991), на Всероссийской научной школе “Модели механики сплошной среды” (Казань, 1993), на международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы математического моделирования и автоматизированного проектирования в машиностроении” (Казань, 1995), на Всероссийских (Всесоюзных) школах “Гидродинамика больших скоростей” (Красноярск, 1987; Чебоксары, 1989, 1992, 1996), на научно-технических конференциях Казанского филиала военного артиллерийского университета (Казань, 1996 – 1999), на Всероссийской конференции “Краевые задачи и их приложения” (Казань, 1999), на международной научной конференции “Краевые задачи аэрогидромеханики и их приложения” (Казань, 2000), на международной научной конференции “Актуальные проблемы математики и механики” (Казань, 2000), на международной молодежной научной школе-конференции “Лобачевские чтения” (Казань, 2001), на международной научной школе “Модели и методы аэродинамики” (Евпатория, 2001), на итоговых научных конференциях Казанского университета и семинарах НИИММ им. Н.Г. Чеботарева (1985 – 2003).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1–21]. Ряд работ выполнен в соавторстве. При написании совместных работ автор диссертации принимал непосредственное участие во всех этапах их выполнения. Всем своим соавторам автор диссертации выражает искреннюю благодарность.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, объединяющих тринадцать параграфов, списка цитированной литературы из 220 наименований и приложения. Диссертация изложена на

237 страницах текста. Формулы, рисунки и таблицы нумеруются с указанием номера параграфа и порядкового номера в пределах параграфа.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы; дан обзор публикаций, близких теме диссертации, по которому можно судить о месте данной работы; кратко изложено содержание работы и сформулированы основные результаты, выносимые на защиту.

1. Развитие и обобщение аналитико-численного метода моделирования границ особенностями для исследования задач о движении подводного крыла в потоке весоной жидкости с границами раздела.

2. Разработка аналитико-численного метода расчета обтекания подводного контура при больших числах Фруда с учетом силы тяжести.

3. Решение задач обтекания телесного контура произвольной формы потоком весоной жидкости с одной и двумя границами раздела сред в рамках линейной и нелинейной теории волн малой амплитуды.

4. Решение задач об установившихся осциллирующих и пульсирующих колебаниях контура в канале со свободной поверхностью и двухслойной жидкостью.

5. Исследование капиллярно-гравитационных волн при обтекании подводного контура.

6. Решение плоской задачи обтекания малопогруженного цилиндра потоком весоной жидкости при больших числах Фруда.

7. Числовые расчеты для задач об установившихся движениях телесного контура в потоке весоной жидкости с границами раздела и их анализ.

Одной из первых задач теории подводного крыла, получившей решение в рамках линейной теории волн малой амплитуды, была задача о движении кругового цилиндра под свободной поверхностью весоной жидкости, поставленная Kelvin (W. Thomson) и рассмотренная в работах Н. Lamb, Т.Н. Havelock, Л.Н. Сретенского и других. Фундаментальные методы теории движения крыла вблизи границ раздела разработаны Н.Е. Кочиным, М.В. Келдышем, М.А. Лаврентьевым, Л.И. Седовым. Систематизированное изложение вопросов гидродинамики подводного крыла дано в монографиях А.Н. Панченкова, И.Т. Егорова и В.Т. Соколова, М.А. Басина и В.П. Шадрина. Теоретическое обобщение методов Н.Е. Кочина, М.В. Келдыша и М.А. Лаврентьева для решения

некоторых задач об установившихся движениях плоского контура при наличии в потоке двух границ раздела было выполнено М.Д. Хаскиндом, А.И. Тихоновым, В.С. Войценой.

Первая глава (§§1–3) посвящена решению модельных задач обтекания цилиндра потоком весомой жидкости с двумя границами раздела сред методом моделирования границ особенностями. Впервые для движения подводного кругового цилиндра данный метод был предложен Г.Г. Тумашевым и Н.Д. Черепениным. В ряде работ Н.Д. Черепенина представлено развитие и обоснование метода для задач с одной границей раздела. М.В. Лотфуллиным аналитический метод дополнен численным методом конформного отображения одно- и двухсвязных областей, что дало возможность получить численные оценки гидродинамических характеристик одного и двух подводных профилей. Одно из главных достоинств метода состоит в точном удовлетворении граничного условия на контуре, что позволяет находить решения задач по крайней мере в линейно–нелинейной постановке. Д.В. Маклаковым, методом близким идее Тумашева–Черепенина, в точной постановке рассмотрено движение крылового профиля вблизи границы раздела двух невесомых жидкостей.

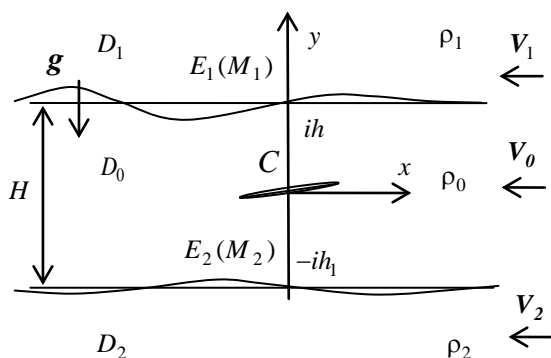


Рис. 1

В §1 дана общая постановка задачи в рамках линейной теории волн малой амплитуды обтекания контура в двухслойной весомой жидкости, имеющей свободную поверхность M_1 (рис. 1 при $\rho_1 = 0$). Введя комплексный потенциал возмущенного течения

$\tilde{w}_j(z_1) = \tilde{\phi}_j(x_1, y_1) + i\tilde{\psi}_j(x_1, y_1)$ ($j = 0, 2$) и используя обозначения

$$\tilde{w}_j(z) = V_j w_j(z), \quad m_k^- = \frac{\rho_k V_k^2}{\rho_0 V_0^2 + \rho_k V_k^2}, \quad m_k^+ = \frac{\rho_0 V_0^2}{\rho_0 V_0^2 + \rho_k V_k^2},$$

$$m_k = m_k^+ - m_k^-, \quad v_0 = \frac{g}{V_0^2}, \quad v_k = \frac{g(\rho_0 - \rho_k)}{\rho_0 V_0^2 + \rho_k V_k^2},$$

где g – ускорение силы тяжести, запишем граничные условия задачи для функций $w_j(z)$ в виде:

на свободной поверхности при $y = h$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{dw_0(z)}{dz} + iv_0 w_0(z)\right] = 0; \quad (1)$$

кинематическое и динамическое условия на линии раздела жидкостей при $y = -h_1$, $k = 2$

$$\operatorname{Im}[w_0(z) - w_k(z)] = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{Re}\left[m_k^+ \frac{dw_0(z)}{dz} - m_k^- \frac{dw_k(z)}{dz} + iv_k w_0(z)\right] = 0; \quad (3)$$

условия непротекания на контуре C

$$\operatorname{Im} w_0(z) = y + \Psi_0 \quad (\Psi_0 = \text{const}), \quad z \in C; \quad (4)$$

а также условия на бесконечности

$$\left|\frac{dw_j(z)}{dz}\right| < A, \quad A < \infty \text{ при } z \rightarrow \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dw_j(z)}{dz} = 0. \quad (5)$$

Комплексный потенциал $w_j(z)$ можно представить в виде суммы потенциалов $w_{bj}(z)$ – бесциркуляционного и $\gamma w_{\gamma j}(z)$ – чисто циркуляционного течений ($\gamma = \Gamma / V_0$, Γ – значение циркуляции). Потенциал $w_j(z)$ удовлетворяет условиям (1) – (5), а $w_{\gamma j}(z)$ наряду с (1) – (3), (5) еще условиям

$$\operatorname{Im} w_{\gamma 0}(z) = \Psi_1 \quad (\Psi_1 = \text{const}) \text{ при } z \in C, \quad (6)$$

$$\Delta_C w_{\gamma 0}(z) = 1,$$

где Δ_C – приращение функции при положительном обходе C .

Далее в §1 поставленная задача исследована для кругового цилиндра. При этом комплексный потенциал строится в виде суммы потенциалов: $w_{b\infty}(z)$, $v_k(z)$, $\Phi_k(z)$ ($k = 1, 2$), где $w_{b\infty}(z)$ – комплексный потенциал обтекания цилиндра безграничным потоком, $v_k(z)$ – комплексные потенциалы от особенностей (диполей), распределенных по невозмущенным уровням поверхностей M_1 и E_2 с вещественными плотностями $\mu_k(x_k)$ (под $\mu_k(x_k)$ подразумеваются $\mu_1(x_1 + ih)$ и $\mu_2(x_2 - ih_1)$) и дополнительных потенциалов

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(z, t_k) \mu_k(t_k) dt_k,$$

в которых функции $F_k(z, t_k)$ построены таким образом, что потенциал $w_{bj}(z)$ удовлетворит на контуре условию (4). Для нахождения плотностей $\mu_k(x_k)$ использованы условия на границах раздела сред и условия (5),

которые позволяют получить систему линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\mu_1(x_1) = \sigma_1(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x_1, t_1) \mu_1(t_1) dt_1 + \int_{-\infty}^{\infty} K_4(x_1, t_2) \mu_2(t_2) dt_2, \quad (7)$$

$$\mu_2(x_2) = \sigma_2(x_2) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x_2, t_2) \mu_2(t_2) dt_2 + \int_{-\infty}^{\infty} K_3(x_2, t_1) \mu_1(t_1) dt_1, \quad (8)$$

где σ_k , K_l ($l = \overline{1, 4}$) выражены через интегральные показательные функции.

Аналогично отыскивается и функция $w_{\gamma j}(z)$ с учетом замены $\mu_k(x_k)$ на $\mu_{\gamma k}(x_k)$, а $w_{b\infty}(z)$ на $w_{\gamma\infty}(z)$. Функция $w_{\gamma\infty}(z)$ выбрана так, чтобы удовлетворить условиям (6). Условия на границах раздела приводят к еще одной системе интегральных уравнений с теми же ядрами K_l и новыми свободными частями $\sigma_{\gamma k}$. Системы (7), (8) решались численно методом последовательных приближений.

В §2 дано решение задачи о движении кругового цилиндра в слое весомой жидкости, ограниченном сверху свободной поверхностью M_1 , а снизу – горизонтальным дном M_2 . На дне при $y = -h_1$ выполняется условие

$$\operatorname{Im} \left[\frac{dw_0(z)}{dz} \right] = 0.$$

В §3 решена задача обтекания круглого цилиндра трехслойным потоком жидкости (рис. 2), когда цилиндр находится в среднем слое толщины H . В данном случае на обеих границах раздела выполняются кинематическое и динамическое условия (2), (3), где $k = 1, 2$. В §§2 и 3, так же, как в §1, с помощью условий на границах раздела решение задач сведено к решению двух систем линейных интегральных уравнений типа (7), (8).

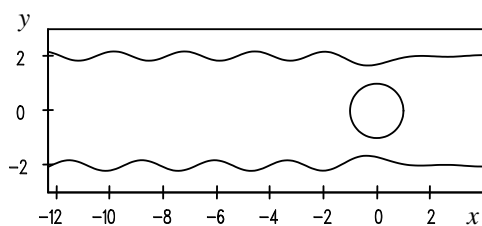


Рис. 2

Для определения формы свободной поверхности и границы раздела жидкостей применены формулы

$$\eta_1(x_1) = \frac{1}{v_0} \operatorname{Re} \left[\frac{dw_0(z)}{dz} \right] \text{ при } y = h, \quad (9)$$

$$\eta_k(x_k) = \frac{1}{v_k} \operatorname{Re} \left[m_k^+ \frac{dw_0(z)}{dz} - m_k^- \frac{dw_k(z)}{dz} \right], \quad (10)$$

где $k=1$ при $y=h$, а $k=2$ при $y=-h_1$. Ввиду наличия в выражениях (9), (10) особых интегралов, содержащие их слагаемые преобразованы на основании свойств производных от интегралов типа Коши.

В качестве частных случаев в §§1–3 рассмотрены также решения задач обтекания кругового цилиндра вблизи одной границы раздела. §§1–3 содержат примеры числовых расчетов гидродинамических характеристик

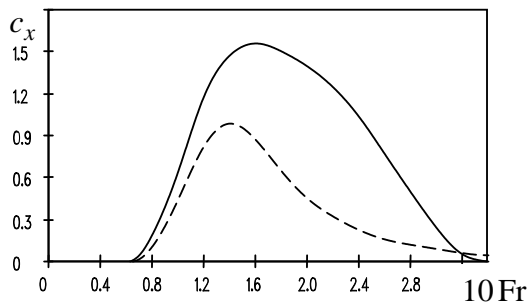


Рис. 3

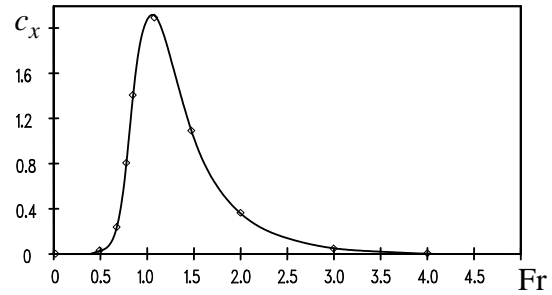


Рис. 4

кругового цилиндра, форм свободной поверхности и линий раздела жидкостей, некоторые из которых приведены на рис. 2 – 5. На рис. 3, 4 даны расчеты коэффициентов волнового сопротивления $c_x = 2X / (\rho_0 V_0^2 a)$ кругового цилиндра радиуса $a=1$ в зависимости от числа Фруда $Fr = V_0 / \sqrt{ga}$ при наличии свободной поверхности и линии раздела жидкостей при $V_2 = V_0$, $\rho_2 / \rho_0 = 1.03$, $\Gamma = 0$, $H/a = 4$, $h/a = 2$. Штриховой линией изображены гидродинамические характеристики цилиндра при наличии только одной линии раздела двух полубезграницных жидкостей. Маркерами отмечены результаты для задачи о движении кругового цилиндра под свободной поверхностью однородной жидкости. На рис. 3

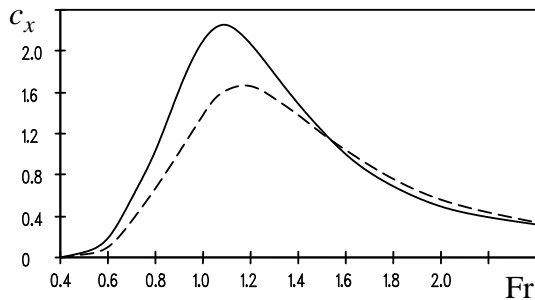


Рис. 5

отдельно выделен диапазон малых чисел Фруда.

На рис. 5 сплошной кривой представлен график зависимости коэффициента волнового сопротивления подводного кругового цилиндра, находящегося в канале с горизонтальным дном, при $h/a = 2$, $H/a = 8$, $\Gamma = 0$. Штриховая кривая

соответствует решению, полученному при замене действия цилиндра действием одного диполя. Такое решение совпадает с результатами Л.Н. Сретенского. При $Fr > 2.8$ $c_x = 0$, что соответствует известному факту отсутствия волнового сопротивления при $Fr_H = V_0 / \sqrt{gH} > 1$. Полученные в расчетах формы свободной поверхности для бесконечно глубокой и ограниченной снизу жидкости хорошо согласуются с результатами J.P. Giesing, A.M.O. Smith.

На рис. 2 представлен пример расчета волн на границах раздела для трехслойной жидкости при $V_1 = V_2 = V_0$, $\Gamma = 0$, $H/a = 4$, $h/a = 2$, $\rho_1/\rho_0 = 0.97$, $\rho_2/\rho_0 = 1.03$, $Fr = 0.08$. §3 содержит также примеры сравнительных, параллельно выполненных расчетов для задачи обтекания эллиптического цилиндра потоком двухслойной жидкости методом моделирования границ особенностями (МГО) и методом гибридных элементов (МГЭ). Решение задачи с помощью МГЭ выполнено

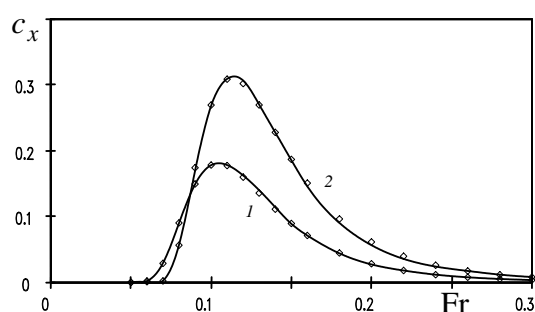


Рис. 6

И.В. Стуровой. Примеры сравнений $c_x = X / (\rho_0 b V_0^2)$ от $Fr = V_0 / \sqrt{gh}$ для эллипсов $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ с $a/b = \{3; 5\}$ (кривые 1, 2) при $h = 4b$ даны на рис. 6. Сплошными линиями изображены результаты МГО, а результаты МГЭ отмечены маркерами. Кроме взаимных сравнений МГО и МГЭ был использован и общий тест:

сравнение результатов расчетов гидродинамических характеристик кругового цилиндра, обтекаемого потоком двухслойной жидкости, с результатами G.X. Wu, выполненными на основе мультипольного разложения.

Во второй главе (§§4–6) исследуются задачи обтекания профиля произвольной формы потоком многослойной весомой жидкости, для которых также развивается метод распределения особенностей по границам раздела. В §4 рассмотрен трехслойный поток (рис. 7). Предложена форма записи комплексного потенциала возмущенного течения, удовлетворяющая условию на контуре в параметрической плоскости ζ , что позволило свести решение задачи обтекания профиля к системам линейных интегральных уравнений для бесциркуляционного и чисто циркуляционного течений

$$\begin{aligned}
\mu_1(\varsigma_1) &= \sigma_1(\varsigma_1) + \text{Im} \int_{T_1} L_1(\varsigma_1, \tau_1) \mu_1(\tau_1) d\tau_1 + \text{Im} \int_{T_2} L_4(\varsigma_1, \tau_2) \mu_2(\tau_2) d\tau_2, \\
\mu_2(\varsigma_2) &= \sigma_2(\varsigma_2) + \text{Im} \int_{T_2} L_2(\varsigma_2, \tau_2) \mu_2(\tau_2) d\tau_2 + \text{Im} \int_{T_1} L_3(\varsigma_2, \tau_1) \mu_1(\tau_1) d\tau_1, \\
L_1(\varsigma_1, \tau_1) &= \frac{1}{\pi} \left[\chi_1(\varsigma_1, \tau_1) + G_1(\varsigma_1, \tau_1) - 2m_1^+ I_1(\varsigma_1, \tau_1) \right], \\
I_1(\varsigma_1, \tau_1) &= \exp[iv_1 f(\varsigma_1)] \int_{\infty}^{\varsigma_1} \exp[-iv_1 f(\vartheta)] \cdot \left[G_{1\vartheta}'(\vartheta, \tau_1) + \chi_{1\vartheta}'(\vartheta, \tau_1) \right] d\vartheta, \\
G_k(\varsigma, \tau_k) &= 1 / \left[\bar{\tau}_k^2 \left(\varsigma - \frac{1}{\tau_k} \right) \right], \quad \chi_k(\varsigma, \tau_k) = \frac{[f(\varsigma) - f(\tau_k)] - f'(\tau_k)(\varsigma - \tau_k)}{(\varsigma - \tau_k)[f(\varsigma) - f(\tau_k)]}, \\
L_4(\varsigma_1, \tau_2) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\varsigma_1 - \tau_2} + G_2(\varsigma_1, \tau_2) - 2m_1^+ I_2(\varsigma_1, \tau_2) \right], \\
I_2(\varsigma_1, \tau_2) &= \exp[iv_1 f(\varsigma_1)] \int_{\infty}^{\varsigma_1} \exp[-iv_1 f(\vartheta)] \cdot \left[-\frac{1}{(\vartheta - \tau_2)^2} + G_{2\vartheta}'(\vartheta, \tau_2) \right] d\vartheta, \\
\sigma_1(\varsigma_1) &= 2 \text{Re} \left[w_{b\infty}^*(\varsigma_1) - 2m_1^+ I_3(\varsigma_1) \right], \\
I_3(\varsigma_1) &= \exp[iv_1 f(\varsigma_1)] \int_{\infty}^{\varsigma_1} \exp[-iv_1 f(\vartheta)] w_{b\infty}^*(\vartheta) d\vartheta, \\
w_{b\infty}^*(\varsigma) &= -(K\varsigma + \bar{K}/\varsigma) + f(\varsigma), \quad K = f_{\varsigma}'(\infty). \\
L_2(\varsigma_2, \tau_2) &= -\frac{1}{\pi} \left[\chi_2(\varsigma_2, \tau_2) + G_2(\varsigma_2, \tau_2) - 2m_2^+ I_4(\varsigma_2, \tau_2) \right], \\
I_4(\varsigma_2, \tau_2) &= \exp[iv_2 f(\varsigma_2)] \int_{\infty}^{\varsigma_2} \exp[-iv_2 f(\vartheta)] \cdot \left[G_{2\vartheta}'(\vartheta, \tau_2) + \chi_{2\vartheta}'(\vartheta, \tau_2) \right] d\vartheta, \\
L_3(\varsigma_2, \tau_1) &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\varsigma_2 - \tau_1} + G_1(\varsigma_2, \tau_1) - 2m_2^+ I_5(\varsigma_2, \tau_1) \right], \\
I_5(\varsigma_2, \tau_1) &= \exp[iv_2 f(\varsigma_2)] \int_{\infty}^{\varsigma_2} \exp[-iv_2 f(\vartheta)] \cdot \left[-\frac{1}{(\vartheta - \tau_1)^2} + G_{1\vartheta}'(\vartheta, \tau_1) \right] d\vartheta, \\
\sigma_2(\varsigma_2) &= -2 \text{Re} \left[w_{b\infty}^*(\varsigma_2) - 2m_2^+ I_6(\varsigma_2) \right], \\
I_6(\varsigma_2) &= \exp[iv_2 f(\varsigma_2)] \int_{\infty}^{\varsigma_2} \exp[-iv_2 f(\vartheta)] w_{b\infty}^*(\vartheta) d\vartheta,
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\gamma 1}(\zeta_1) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\ln \frac{(\zeta_1 - 1/\overline{\zeta_\gamma}) [f(\zeta_1) - f(\zeta_\gamma)]}{(\zeta_1 - \zeta_\gamma) [f(\zeta_1) - \overline{f(\zeta_\gamma)} - 2ih]} - 2m_1^+ I_7(\zeta_1) + 2m_1^- I_8(\zeta_1) \right],$$

$$I_7(\zeta_1) = \exp[i\nu_1 f(\zeta_1)] \int_{\infty}^{\zeta_1} \exp[-i\nu_1 f(\vartheta)] \cdot \left[\frac{1}{\vartheta - 1/\overline{\zeta_\gamma}} + \frac{f'(\vartheta)}{f(\vartheta) - \overline{f(\zeta_\gamma)} - 2ih} - \frac{1}{\vartheta - \zeta_\gamma} \right] d\vartheta,$$

$$I_8(\zeta_1) = \exp[i\nu_1 f(\zeta_1)] \int_{\infty}^{\zeta_1} \exp[-i\nu_1 f(\vartheta)] \frac{f'(\vartheta) d\vartheta}{f(\vartheta) - \overline{f(\zeta_\gamma)} - 2ih},$$

$$\sigma_{\gamma 2}(\zeta_2) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\ln \frac{\zeta_2 - 1/\overline{\zeta_\gamma}}{\zeta_2 - \zeta_\gamma} - 2m_2^+ I_9(\zeta_2) \right],$$

$$I_9(\zeta_2) = \exp[i\nu_2 f(\zeta_2)] \int_{\infty}^{\zeta_2} \exp[-i\nu_2 f(\vartheta)] \cdot \left[\frac{1}{\vartheta - 1/\overline{\zeta_\gamma}} - \frac{1}{\vartheta - \zeta_\gamma} \right] d\vartheta,$$

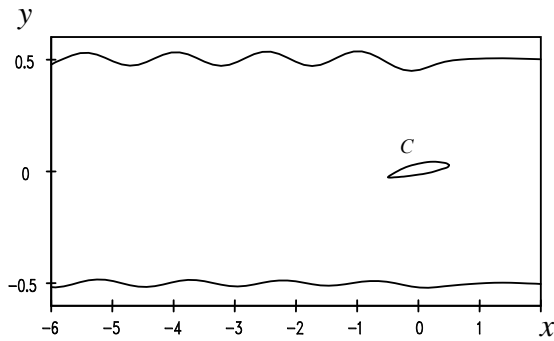


Рис. 7

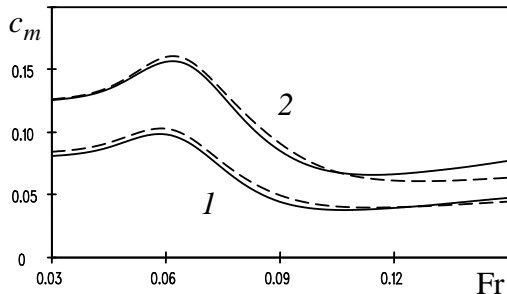


Рис. 8

длина хорды профиля) представлен на рис. 7.

где функция $z = f(\zeta)$ осуществляет конформное отображение внешности круга единичного радиуса на внешность профиля. Линии $T_k (\zeta = \zeta_k)$ являются образами линий $y = h$, $y = -h_1$. Для чисто циркуляционного течения σ_k в уравнениях следует заменить на $\sigma_{\gamma k}$, точка $z_\gamma \in D_1$ ($z_\gamma = f(\zeta_\gamma)$).

Значение циркуляции находится на основе постулата Жуковского–Чаплыгина. Дан метод вычисления формы поверхностей раздела сред. Пример расчета картины течения для профиля NACA 66mod при $Fr=0.06$, $\rho_1/\rho_0 = 0.97$, $\rho_2/\rho_0 = 1.03$, $\alpha = 3^\circ$, $h/L=0.5$, $H/L=1$ ($L=1$ –

Исследование обтекания профиля в канале с горизонтальным дном проведено в §5. Представлены решения, полученные методом, изложенным в §4, для двухслойной жидкости, открытого канала со свободной поверхностью и канала с твердыми стенками. Результаты расчетов даны на рис. 8 – 12. На рис. 8 сплошными кривыми представлены графики зависимости коэффициента момента

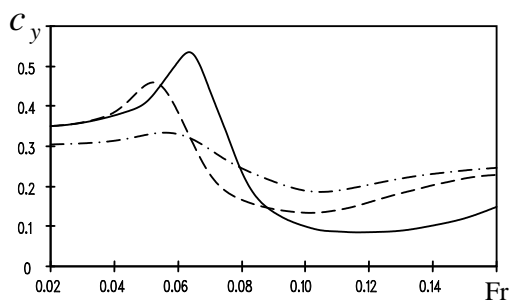


Рис. 9

$c_m = 2M / (\rho_0 V_0^2 L)$ относительно точки максимальной кривизны на носике профиля от числа Фруда $Fr = V_0 / \sqrt{gL}$ для профиля NACA 66mod при углах атаки $\alpha = \{0^\circ, 1^\circ\}$ (кривые 1, 2), $V_1 = V_0$, $H/L = 1$, $h/L = 0.5$, $\rho_1/\rho_0 = 0.97$. Штриховые линии отвечают случаю $h_1 = \infty$. Как

показывают расчеты, периодические волны на границе раздела жидкостей, когда нижний слой жидкости ограничен дном, при данных ρ_1/ρ_0 и H/L существуют при $Fr < 0.17$. В данной задаче исследовано также влияние разных скоростей потоков на гидродинамические характеристики (рис. 9, 10) при $H/L = 1$, $\rho_1/\rho_0 = 0.97$, $\alpha = 1^\circ$. Сплошные, штриховые и штрих-пунктирные кривые на рисунках соответствуют: $V_1/V_0 = 0.8$, $h/L = 0.4$;

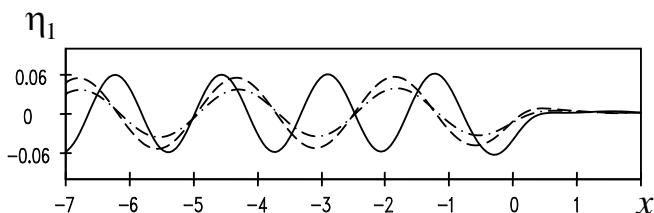


Рис. 10

$V_1/V_0 = 1.2$, $h/L = 0.4$; $V_1/V_0 = 1.2$, $h/L = 0.6$. Как видно из графиков, наибольшее и наименьшее значения $c_y(Fr)$ достигаются при меньших значениях V_1/V_0 и h/L . Пример расчета формы волн при $Fr = 0.07$ и разных V_1/V_0 и h/L представлен на рис. 10.

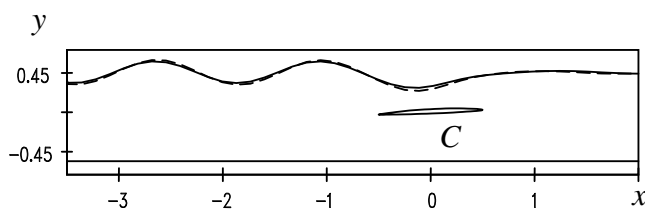


Рис. 11

Для задач о движении профиля под свободной поверхностью ограниченной снизу жидкостью и в канале с твердыми стенками изучено влияние каждой из границ на

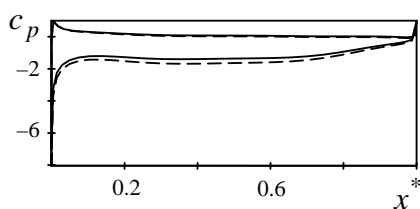


Рис. 12

гидродинамические характеристики. Пример расчета формы свободной поверхности для первой задачи при $Fr = 0.5$, $h/L = 0.45$, $H/L = 1$, $\alpha = 3^\circ$ представлен на рис. 11, где штриховая линия соответствует неограниченной снизу жидкости. Соответствующее

распределение коэффициента давления $c_p = 1 - \left| \frac{d\tilde{w}_0}{d\zeta} \cdot \frac{1}{f'(\zeta)} \right|^2 / V_0^2$ по профилю в зависимости от расстояния x^* , отсчитываемого от носика по хорде профиля, изображено на рис. 12.

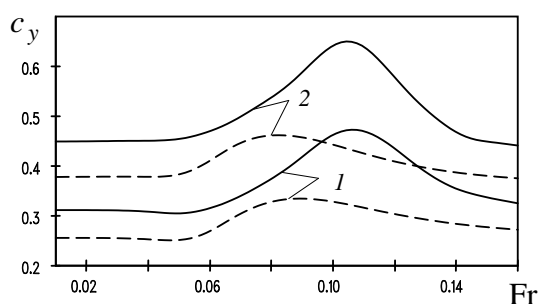


Рис. 13

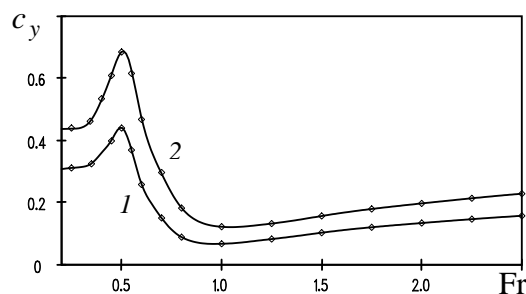


Рис. 14

В §6 даны решения задач для профиля в двухслойной жидкости со свободной поверхностью при расположении контура над и под границей раздела жидкостей. Проведены исследования явления “мертвой воды” и потоков с разной скоростью течения.

Расчеты, выполненные для профиля NACA 66mod, представлены на рис. 13, 14. Сплошные кривые на рисунках соответствуют обтеканию профиля под свободной поверхностью над границей раздела двух жидкостей, когда $h/L = 0.55$, $H/L = 1$, $\rho_2/\rho_0 = 1.03$, $V_2 = V_0$, $\alpha = \{1^\circ, 2^\circ\}$ (кривые 1, 2). Выделение интервала $Fr < 0.17$ связано с тем, что, как показали расчеты, именно при малых числах Фруда для заданных H/L и ρ_2/ρ_0 при одинаковых скоростях потоков на линии раздела жидкостей существуют периодические волны с амплитудами, значительно превосходящими амплитуды волн на свободной поверхности. Штриховые кривые представляют характеристики для задачи обтекания профиля над границей раздела двух полубезграницных жидкостей разной плотности,

маркерами отмечены результаты расчетов для задачи обтекания профиля под свободной поверхностью жидкости одной плотности.

В задачах о течениях двухслойной жидкости со свободной поверхностью при одинаковой скорости потоков на границах раздела существует два типа волн. Длина волны первого типа такая же, как длина на поверхности однородной жидкости. Амплитуда этих волн значительна на свободной поверхности. Волны второго типа при малой разности плотностей потоков получают большее развитие на линии раздела жидкостей и существуют только при $Fr < Fr^*$, где Fr^* – критическое значение, зависящее от H/L и ρ_2/ρ_0 .

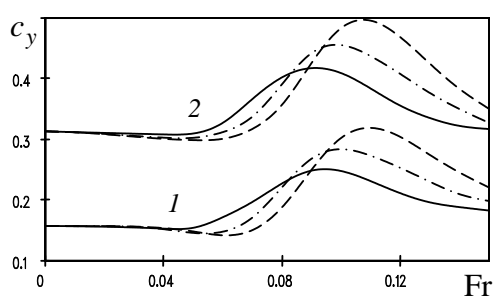


Рис. 15

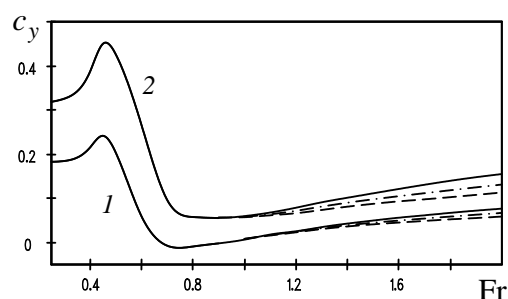


Рис. 16

Можно показать, что при разной скорости потоков на границах раздела также образуется два типа волн. Однако длина волн и первого, и второго типа зависит от плотностей и скоростей потоков и толщины верхнего слоя жидкости, но критическое значение числа Фруда совпадает с критическим значением числа Фруда для случая $V_2 = V_0$, то есть не зависит от скоростей потоков. Результаты расчетов потоков с разной скоростью течения представлены на рис. 15 – 17. Сплошные, штрих–пунктирные и штриховые кривые соответствуют $V_2/V_0 = \{1.3, 1, 0.8\}$ при $\rho_2/\rho_0 = 1.03$, $H/L = 1$, $h_1/L = 0.5$. На рис. 15, 16 представлены расчеты коэффициента подъемной силы в зависимости от числа Фруда для углов атаки $\alpha = \{0^\circ, 1^\circ\}$ (кривые 1, 2). На рис. 15 показан интервал малых значений числа Фруда $Fr < Fr^*$. Можно отметить, что в данном интервале максимум больше у тех кривых $c_y(Fr)$, где меньше отношение V_2/V_0 . Влияние различных скоростей потоков в этом интервале очень значительно. На рис. 16 представлен интервал $Fr > Fr^*$. Здесь выделяются два характерных диапазона. При $Fr^* < Fr < 1$ влияние различных скоростей

потоков фактически отсутствует и результаты расчета c_y совпадают с результатами для однородного по скорости и плотности потока, имеющего свободную поверхность. При $Fr > 1$ начинает сказываться многослойность потока. Отметим, что расчет проведен с некоторым отступлением от $Fr^* = 0.17$, так как при приближении к критическому значению числа Фруда резко увеличивается время расчета. На рис. 17 представлен пример расчета границ раздела сред при $\alpha = 4^\circ$ и $Fr = 0.1$. Свободная поверхность

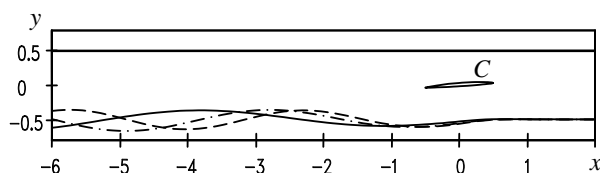


Рис. 17

при таком значении числа Фруда остается практически невозмущенной — явление “мертвой воды”, а значения гидродинамических характеристик при малых числах Фруда носят “аномальный” характер, связанный с наличием волн значительной амплитуды на границе раздела жидкостей.

В §6 дано также решение задачи о движении подводного профиля в нижнем слое жидкости. Обнаружены аналогичные эффекты. Пример картины течения при $V_2 = V_0$, $\rho_2 / \rho_0 = 1.01$, $H/L = 0.4$, $h/L = 0.8$, $\alpha = 0^\circ$, $Fr = \{0.032, 0.038\}$ (кривые 1, 2) для профиля NASA 66₁ – 012 представлен на рис. 18.

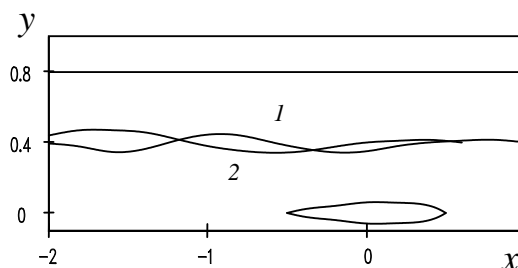


Рис. 18

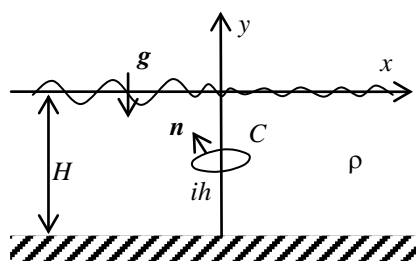


Рис. 19

Третья глава (§§7–9) посвящена исследованию методом МГО установившихся малых колебаний контура в весомай жидкости, таких, что применимы обычные упрощения линейной теории волн малой амплитуды. Предполагается, что волны расходятся в обе стороны от тела.

§7 содержит решения задачи об установившихся осциллирующих колебаниях тела в канале со свободной поверхностью и горизонтальным дном (рис. 19). Вводится комплексный потенциал течения $w(z, t) = w_1(z) \cos \omega t + w_2(z) \sin \omega t$, где функции $w_k(z)$ построены аналогично главе 2 при плотностях особенностей $\mu_k(x)$, $\tilde{\mu}_k(x_1 - ih)$ ($k = 1, 2$), распределенных по свободной поверхности и линии

дна, ω – частота колебаний, t – время. Из условий на границах раздела решение сведено к решению систем интегральных уравнений

$$\begin{cases} \mu_{k0}(x) = q_k(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x, \tau) \mu_{k0}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} K_4(x, \tau_1) \tilde{\mu}_{k0}(\tau_1) d\tau_1 \\ \tilde{\mu}_{k0}(x_1) = \tilde{q}_k(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x_1, \tau_1) \tilde{\mu}_{k0}(\tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{\infty} K_3(x_1, \tau) \mu_{k0}(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (11)$$

где $k = 0, 1, 2$, причем

$$\begin{aligned} \mu_k(x) &= \mu_{k0}(x) + \operatorname{Re}[C_k \bar{\mu}_{00}(x)], \\ \tilde{\mu}_k(x_1) &= \tilde{\mu}_{k0}(x_1) + \operatorname{Re}[C_k \bar{\tilde{\mu}}_{00}(x_1)], \quad (k = 1, 2), \end{aligned}$$

где C_k определяются из условий излучения волн.

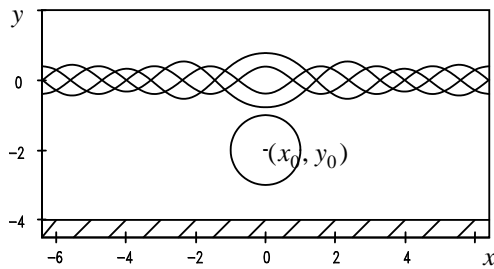


Рис. 20

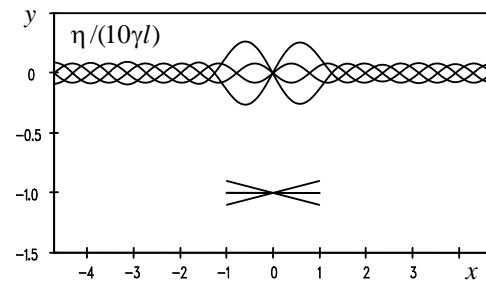


Рис. 21

Расчеты гидродинамических характеристик проводились для горизонтальных, вертикальных и смешанных колебаний кругового цилиндра, а также для вертикальных, вращательных и смешанных колебаний пластинки. Два примера расчета формы свободной поверхности изображены на рис. 20, 21. На рис. 20 представлены вертикальные колебания круга радиуса $r_0 = 1$ по закону $y_0 = -h + \beta \sin \omega t$ при безразмерной частоте колебаний $\bar{\omega} = \omega \sqrt{r_0 / g} = 1.4$, $h / r_0 = 2$, $H / r_0 = 4$, $\bar{t} = \omega t = \pi(j - 1) / 2$, $j = \overline{1, 4}$. Возвышение свободной поверхности отнесено к малому параметру β .

На рис. 21 показаны вращательные колебания горизонтальной пластинки длины $2l$ относительно средней точки по закону $\theta = \gamma \sin \omega t$, где θ – угол наклона к оси x , γ – малый параметр, при $\bar{\omega} = \omega \sqrt{l / g} = 2$, $h / l = 1$, $H = \infty$, $l = 1$, $\bar{t} = \omega t = \pi(j - 1) / 2$, $j = \overline{1, 4}$. Угол отклонения пластинки на рис. 21 отнесен к 10γ .

В §8 рассмотрены равномерные и неравномерные пульсирующие колебания кругового цилиндра в канале со свободной поверхностью и горизонтальным дном. При равномерных пульсирующих колебаниях радиус цилиндра изменялся по закону $r = r_0 + r_1 \sin \omega t$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), где $r_0 = 1$ – исходное значение радиуса, а r_1 – малая величина. На рис. 26 представлены расчеты средней за период вертикальной силы

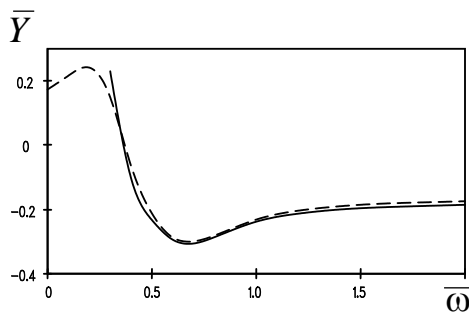


Рис. 22

$\bar{Y} = Y_{cp.} / (\pi \rho r_0 (r_1 \omega)^2)$ в зависимости от безразмерной частоты колебаний $\bar{\omega} = \omega / \sqrt{g / r_0}$ при $h / r_0 = 3$, $\bar{H} = H / r_0 = 20$ (сплошная кривая). Штриховой линией представлены результаты для бесконечно глубокой жидкости. Отмечено сильное влияние дна

при пульсирующих колебаниях, а также тот факт, что для канала конечной глубины периодические волны на свободной поверхности существуют при $\bar{\omega} > 1 / \sqrt{\bar{H}}$.

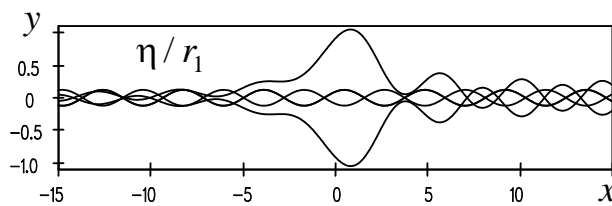


Рис. 23

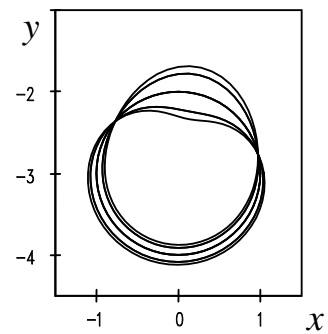


Рис. 24

Расчет свободной поверхности при неравномерных пульсирующих колебаниях круга по закону изменения радиуса, представленному на рис. 24, где изменение радиуса отнесено к малому параметру, дан на рис. 23 при $\bar{h} = 3$, $\bar{H} = 20$, $\bar{\omega} = 1.2$.

В §9 исследована задача о колебаниях эллиптического контура в двухслойной ограниченной снизу жидкости. Решение задачи сведено к решению систем типа (11). Для случая неограниченного снизу потока результаты расчетов ненулевых коэффициентов присоединенных масс эллипса с $a / b = 2$ при $\bar{h} = 2$ для $\rho_1 / \rho_0 = 0.97$ в зависимости от

$\bar{\sigma} b = \frac{\omega^2 b}{g} \frac{\rho_0 + \rho_1}{\rho_0 - \rho_1}$ представлены на рис. 25, где $\bar{\lambda}_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\pi \rho_0 b^m}$. Для $\bar{\lambda}_{11}$, $\bar{\lambda}_{22}$

(кривые 1, 2) $m = 2$, для $\bar{\lambda}_{31}$ $m = 3$, для $\bar{\lambda}_{33}$ $m = 4$ (кривые 3, 4). Примеры формы линии раздела жидкостей для неограниченного и ограниченного снизу потока (штриховые и сплошные кривые) даны на рис. 26, где $\bar{\rho} = 0.97$ при $\bar{h} = 3$, $H/b = 4.5$, $\tilde{\sigma}b = 0.6$ для горизонтально-вертикальных колебаний эллипса с $a/b = 2$ при одинаковых малых параметрах по горизонтали и вертикали $\alpha = \beta$. Влияние дна сказывается в увеличении амплитуды волн с одной стороны от контура и их уменьшении по другую сторону. Рассчитанные коэффициенты присоединенных масс подводного кругового цилиндра соответствуют аналитическим результатам R. Eatock Taylor, C.S. Hu.

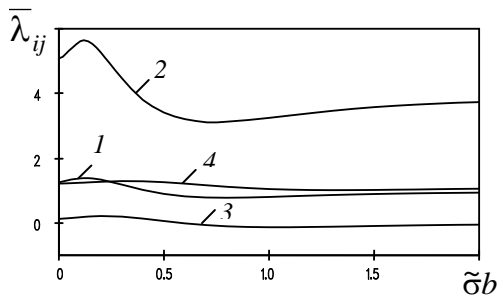


Рис. 25

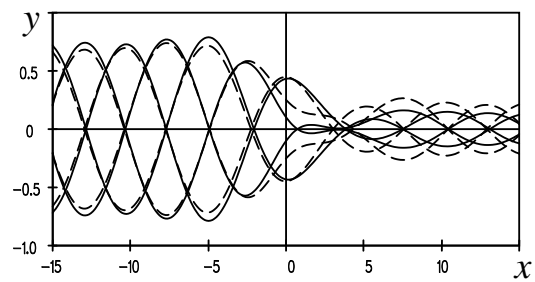


Рис. 26

Четвертая глава содержит решения задачи о капиллярно-гравитационных волнах на свободной поверхности при обтекании подводного контура на примере модельной задачи обтекания кругового цилиндра в бесциркуляционном (§10) и циркуляционном (§11) случаях. В обоих случаях из условия на свободной поверхности получено линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно плотности распределенных особенностей с ядром

$$K(x, t) = -\frac{1}{\pi} \frac{g}{U_0^2 s_0} \operatorname{Im} \left[\frac{\alpha i (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)}{\rho g (x - \zeta(t))} + E(\bar{s}_1) \exp(\bar{s}_1 x) \int_{-\infty}^x \exp(-\bar{s}_1 \lambda) H(\lambda, t) d\lambda - \right. \\ \left. - E(\bar{s}_2) \exp(\bar{s}_2 x) \int_{\infty}^x \exp(-\bar{s}_2 \lambda) H(\lambda, t) d\lambda \right], \quad \zeta(t) = -ih + a^2 / (t - ih),$$

$$s_1 = -\frac{\rho U_0^2 i}{2\alpha} (1 + s_0), \quad s_2 = -\frac{\rho U_0^2 i}{2\alpha} (1 - s_0), \quad s_0 = \sqrt{1 - 4\alpha g / (\rho U_0^4)},$$

$$H(\lambda, t) = \frac{a^2}{(t - ih)^2 [\lambda - \zeta(t)]}, \quad E(\bar{s}_j) = -i - \frac{U_0^2}{g} \bar{s}_j + \frac{\alpha i \bar{s}_j^2}{\rho g} \quad (j = 1, 2)$$

и следующими свободными частями для бесциркуляционного и циркуляционного течений:

$$\sigma(x) = \frac{2g}{U_0^2 s_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha i (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)}{\rho g} \frac{U_0 a^2}{x + ih} + E(\bar{s}_1) \exp(\bar{s}_1 x) \int_{-\infty}^x \exp(-\bar{s}_1 t) \frac{U_0 a}{t + ih} dt - \right. \\ \left. - E(\bar{s}_2) \exp(\bar{s}_2 x) \int_{-\infty}^x \exp(-\bar{s}_2 t) \frac{U_0 a}{t + ih} dt \right],$$

$$\sigma_\gamma(x) = \frac{\Gamma}{\pi} \operatorname{Re} \left[i \ln \frac{x - \bar{z}_\gamma}{x + ih - a^2 / (\bar{z}_\gamma - ih)} + \bar{B}_1 \exp(\bar{s}_1 x) \int_{-\infty}^x \frac{\exp(-\bar{s}_1 t)}{t + ih - a^2 / (\bar{z}_\gamma - ih)} dt - \right. \\ \left. - \bar{B}_2 \exp(\bar{s}_2 x) \int_{-\infty}^x \frac{\exp(-\bar{s}_2 t)}{t + ih - a^2 / (\bar{z}_\gamma - ih)} dt \right], \quad B_j = \frac{1}{s_0} \left(-\frac{\alpha s_j}{\rho U_0^2} + i + \frac{g}{s_j U_0^2} \right),$$

$j=1, 2$, где U_0 – скорость набегающего потока, α – коэффициент поверхностного натяжения, g – ускорение силы тяжести, ρ – плотность жидкости, h – глубина погружения центра кругового цилиндра радиуса a , Γ – значение циркуляции, z_γ – точка

вне области течения. Пределы в интегралах расставлены согласно условию излучения волн. Получены и проанализированы результаты по поверхностным волнам, а также вычисления коэффициентов подъемной силы и волнового сопротивления в зависимости от числа

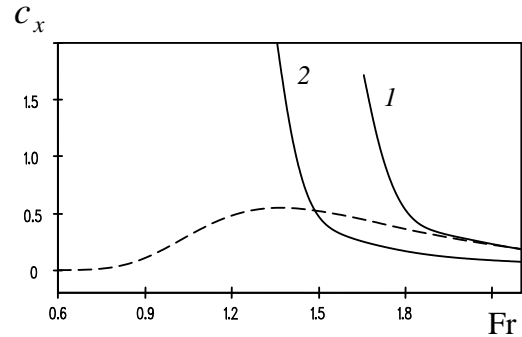


Рис. 27

Фруда при изменении глубины погружения, размеров тела, числа Вебера и температуры. На рис. 27 представлены расчеты коэффициента волнового сопротивления $c_x = 2X / (\rho U_0^2 a)$ в зависимости от числа Фруда $Fr = U_0 / \sqrt{ga}$. Сплошные кривые 1, 2 соответствуют обтеканию цилиндра с числами Вебера $We_g = \alpha / g \rho a^2 = \{1.855; 0.824\}$ при $h/a = 3$, что отвечает, к примеру, обтеканию цилиндров с радиусами $a = 0.002$ и $a = 0.003$ при коэффициенте поверхностного натяжения $\alpha = 0.0728$ для границы вода–воздух при температуре $T = 20^\circ \text{C}$. Штриховая кривая соответствует учету

только силы весомости при той же относительной глубине погружения. Значит, влияние силы поверхностного натяжения может быть значительным, однако для границы вода–воздух это имеет место только для тела небольших размеров. Отметим также, что в противовес чисто капиллярным и чисто гравитационным волнам смешанные волны существуют только при числах Фруда $Fr \geq Fr^*$, где Fr^* – некоторое минимальное, отличное от нуля критическое значение.

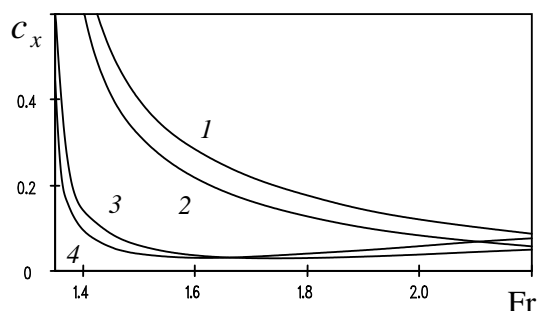


Рис. 28

В §11 изучено влияние циркуляции на гидродинамические характеристики цилиндра и форму образующихся поверхностных волн. На рис. 28 даны графики расчета коэффициента волнового сопротивления c_x в зависимости от числа Фруда при $We_g = 0.824$, $h/a = 4$. Кривые 1 – 4 соответствуют обтеканию цилиндра с циркуляцией $\gamma = \Gamma/(Ua) = \{1; 0.5; -2; -2.5\}$ соответственно. Как можно видеть на рисунке, если для положительных γ значение c_x уменьшается с увеличением числа Фруда, то для отрицательных γ значение c_x вначале уменьшается, а затем растет.

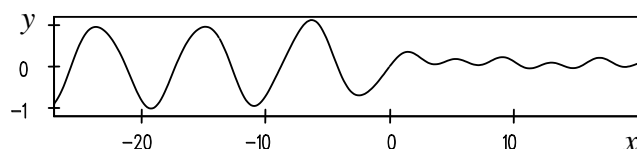


Рис. 29

Качественное продолжение графиков, представленных на рис. 28, при больших числах Фруда можно увидеть на рис. 36. В §13 рассмотрено воздействие только силы тяжести, но для значительных Fr влияние поверхностного натяжения несущественно. На рис. 29 изображен вариант расчета формы свободной поверхности при $h/a = 4$, $\gamma = -1$, $We_g = 0.824$, $Fr = 1.4$.

В пятой главе представлены нелинейные волны при обтекании подводного контура. Наибольшие успехи при исследовании нелинейных волн достигнуты при обтекании особенностей N. Salvesen и C. Kerczek, Э.Л. Амровиным, Н.А. Вальдманом и А.Н. Ивановым, В.П. Житниковым, О.И. Шерыхалиным и Н.М. Шерыхалиной, и особенно Д.В. Маклаковым. Тонкий профиль близи границы раздела двух жидкостей изучался В.В.

Головченко и Д.Н. Гореловым. Рассмотрение цилиндрических форм при нелинейных граничных условиях было начато Е.О. Тук. Среди новых исследований здесь можно указать работу С.И. Горлова. Одно из направлений изучения нелинейных волн связано с методом возмущений, предложенным J.V. Wehausen, E.V. Laitone. Для толстого симметричного профиля с нулевым углом атаки схема возмущений второго и третьего порядка с использованием метода, близкого методу Кочина, была реализована N. Salvesen. Среди последних значительных результатов, полученных с помощью численных методов, следует отметить исследования G. Thiart, V. Bertram, G. Jensen, выполненные панельным методом высокого порядка для симметричного 12%-го профиля, а также исследования К.Е. Афанасьева и С.В. Стуколова для ограниченного снизу потока, проведенные методом комплексных граничных элементов на примере кругового контура и руля Жуковского.

В §12 методом МГО с использованием метода возмущений дано решение задачи обтекания крылового профиля произвольной формы в канале со свободной поверхностью и горизонтальным дном (рис. 30). Согласно методу решение отыскивается в виде ряда

$$\begin{aligned} W(z_1) &= w^{(1)}(z_1) + w^{(2)}(z_1) + \dots + w^{(k)}(z_1) + \dots \\ (w^{(k)}(z_1) &= \varphi^{(k)}(x_1, y_1) + i\psi^{(k)}(x_1, y_1)), \\ \eta(x_1) &= \eta^{(1)}(x_1) + \eta^{(2)}(x_1) + \dots + \eta^{(k)}(x_1) + \dots, \\ U &= u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} + \dots + u^{(k)} + \dots, \end{aligned}$$

где $W(z_1) = \varphi(x_1, y_1) + i\psi(x_1, y_1)$ – комплексный потенциал возмущенного течения, $\eta(x_1)$ – возвышение свободной поверхности. Величины $w^{(k)}(z)$, $\eta^{(k)}(x)$, $u^{(k)}$ будут порядка $O(\varepsilon^k)$, где ε – малый параметр. Граничные условия на свободной поверхности, профиле и линии дна для

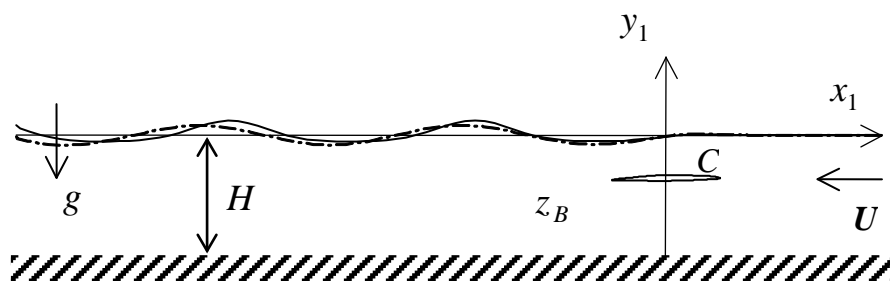


Рис. 30

функций $w^{(k)}(z_1)$ принимают вид

$$\operatorname{Re} \left[\frac{dw^{(k)}(z_1)}{dz_1} + i v w^{(k)}(z_1) \right] = q^{(k)}(x_1) \quad (k=1, 2, \dots),$$

$$\frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial s} = u^{(k-1)} \cos(n, x_1) \quad (z_1 \in C),$$

$$\operatorname{Im} \frac{dw^{(k)}}{dz_1} = 0 \quad (y_1 = -H).$$

С помощью метода §5 решение задачи сведено к решению систем

$$\mu_1^{(k)}(\zeta_1) = \sigma_1^{(k)}(\zeta_1) + \operatorname{Im} \int_{T_1} L_1(\zeta_1, \tau_1) \mu_1^{(k)}(\tau_1) d\tau_1 + \operatorname{Im} \int_{T_2} L_4(\zeta_1, \tau_2) \mu_2^{(k)}(\tau_2) d\tau_2,$$

$$\mu_2^{(k)}(\zeta_2) = \sigma_2^{(k)}(\zeta_2) + \operatorname{Im} \int_{T_2} L_2(\zeta_2, \tau_2) \mu_2^{(k)}(\tau_2) d\tau_2 + \operatorname{Im} \int_{T_1} L_3(\zeta_2, \tau_1) \mu_1^{(k)}(\tau_1) d\tau_1,$$

$$\sigma_1^{(1)}(\zeta_1) = 2 \operatorname{Re} \left\{ w_{b\infty}^{(1)}(\zeta_1) - 2 \exp[i v f(\zeta_1)] \int_{\infty}^{\zeta_1} \exp[-i v f(\vartheta)] \frac{dw_{b\infty}^{(1)}}{d\vartheta} d\vartheta \right\},$$

$$\sigma_1^{(k)}(\zeta_1) = 2 \operatorname{Re} Q^{(k)}(\zeta_1) + u^{(k-1)} \sigma_1^{(1)}(\zeta_1) / u^{(0)} \quad (k=2, 3, \dots),$$

$$\sigma_2^{(k)}(\zeta_2) = -2 \operatorname{Re} [w_{b\infty}^{(k)}(\zeta_2)], \quad w_{b\infty}^{(k)} = u^{(k-1)} w_{b\infty}^{(1)} / u^{(0)},$$

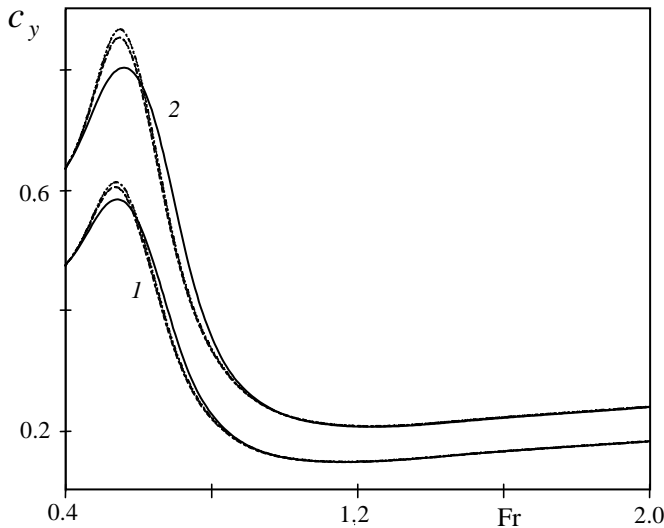


Рис. 31.

где функции $Q^{(k)}$ выражаются через функции $q^{(k)}$. Ядра L_l ($l = \overline{1, 4}$) аналогичны полученным в §5 для задачи об открытом канале. Полностью сохраняют свою форму интегральные уравнения для определения $\mu_{\gamma 1}$, $\mu_{\gamma 2}$. Изменения для чисто циркуляционного потенциала содержатся в выражении циркуляции. Числовые

расчеты выполнялись для случая бесконечно глубокой жидкости. Результаты расчетов гидродинамических характеристик для профиля НАСА 66mod представлены на рис. 30 – 32, где теориям первого, второго и третьего порядков соответствуют сплошные, штриховые и штрих-пунктирные кривые. Линейные размеры отнесены к длине хорды $L = 1$. На

рис. 31, 32 изображены зависимости коэффициента подъемной силы $c_y = 2Y/(\rho U^2 L)$ от числа Фруда $Fr = U/\sqrt{gL}$ для разных приближений при различной глубине погружения h и углах атаки α . На рис. 31 даны результаты при фиксированной глубине погружения $h=0.6$ и углах атаки $\alpha = \{2^\circ, 3^\circ\}$ (кривые 1, 2), а на рис. 32 – при фиксированном угле атаки $\alpha = 1^\circ$ для двух глубин погружения $h = \{0.6, 0.4\}$ (кривые 1, 2). Можно

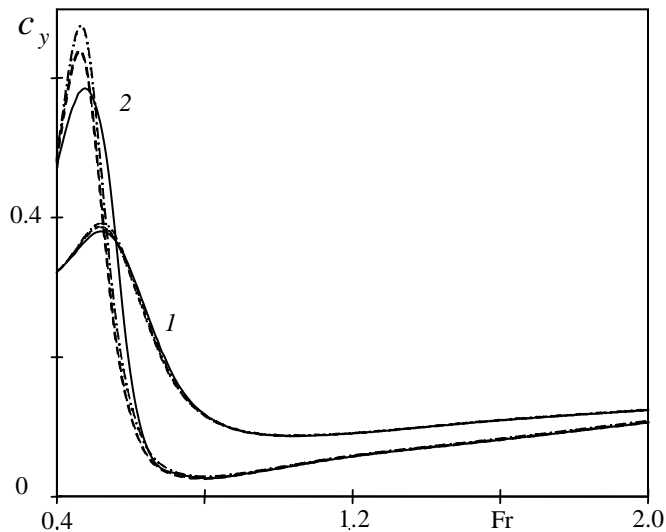


Рис. 32

отметить, что различие результатов в первом – третьем приближениях относится к диапазону чисел Фруда в области максимальных значений c_y и возрастает с уменьшением глубины погружения и увеличением угла атаки. Для достаточно тонких гидропрофилей при малых углах атаки (а именно такие углы реальны) коэффициент

волнового сопротивления мал, и одной из наиболее важных характеристик является коэффициент подъемной силы, а его вычисление требует

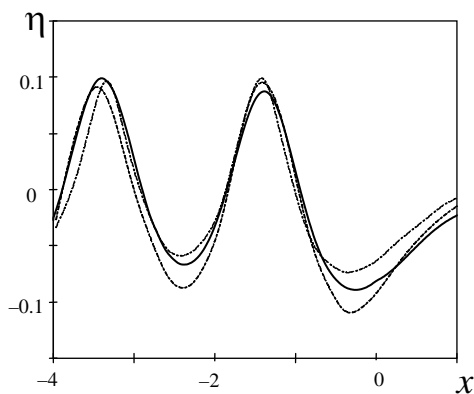


Рис. 33

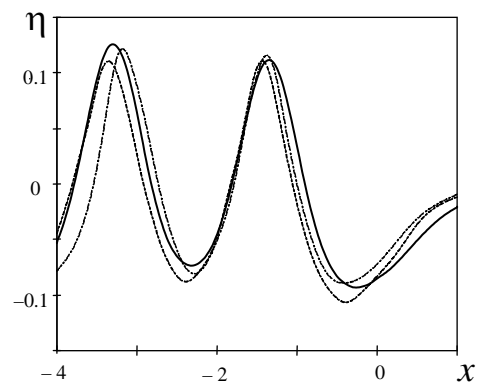


Рис. 34

наиболее точного выполнения граничного условия на профиле. Как можно заметить на рис. 31, 32, при увеличении числа Фруда результаты расчетов

по теории первого, второго и третьего порядков сближаются. Это можно объяснить тем, что, как было выявлено Е.О. Тук и N. Salvesen, по мере увеличения числа Фруда вначале преобладает влияние свободной поверхности, а далее – условия на контуре, которое в данном методе всегда выполняется точно. Пример расчета формы свободной поверхности при $h = 0.4$, $\alpha = 1^\circ$ и $Fr = 0.611$ представлен на рис. 30.

Сравнения волн, рассчитанных предлагаемым методом по теории возмущений третьего порядка (сплошные кривые), с экспериментальными данными J.H. Duncan (штриховые) и расчетами G. Thiart, V. Bertram, G. Jensen (штрих-пунктир) для профиля NACA 0012 при $Fr=0.567$ для двух глубин погружения $h=1.034$ и $h=0.950$ при $\alpha = 5^\circ$ даны на рис. 33, 34. Графики представлены в увеличенном масштабе по вертикали. При пропорциональном представлении кривые в значительной части сливаются, так как результаты достаточно близки.

В §13 в отличие от §§1–12 предложен и реализован иной аналитико-численный метод, пригодный для рассмотрения малоизученного интервала больших чисел Фруда при учете весомости жидкости. В 1962 г. Г.Г. Тумашевым и О.М. Киселевым независимо была введена аппроксимация граничного условия на свободной поверхности, основанная на

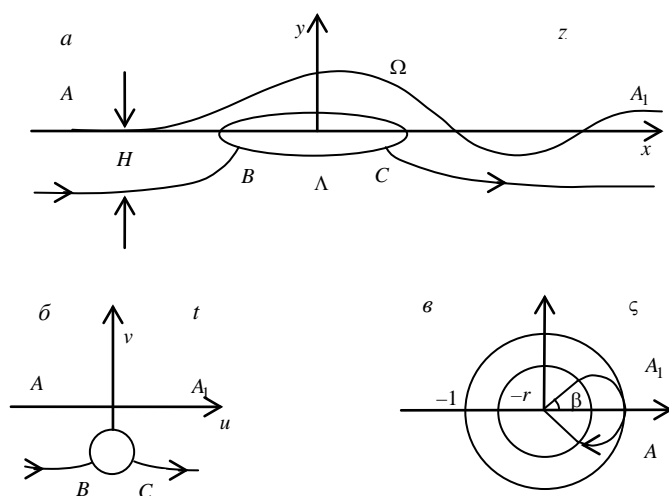


Рис. 35

единственном допущении о том, что модуль скорости на свободной поверхности близок к своему значению в невозмущенном потоке. Это позволяет получать решения, переходящие в точные при $Fr \rightarrow \infty$. Подробное описание аппроксимации представлено в монографии О.М. Киселева и Л.М. Котляра. Исследование обтекания телесного контура на основе данной

аппроксимации было положено работой О.М. Киселева и О.В. Троепольской, в которой удалось рассмотреть круговой профиль достаточно удаленный от свободной поверхности. В [13, 14] предложен метод, позволяющий изучать малопогруженный цилиндр в том числе некругового сечения.

Рассмотрим плоский стационарный потенциальный поток весоной жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью Ω , обтекающий гладкий замкнутый контур Λ в плоскости $z = x + iy$ (рис. 35а). Будем считать, что критические точки потока лежат на контуре Λ , и обозначим через H расстояние от разветвляющейся на Λ линии тока до свободной поверхности при $x = -\infty$. Пусть α – угол между касательной к Λ и осью x , L – длина контура Λ , s – безразмерная (отнесенная к L) дуговая абсцисса контура, возрастающая при движении по Λ против часовой стрелки. Форму контура Λ определим с помощью соотношений

$$\alpha = 2\pi s + G(s), \quad L/H = l_0; \quad G(s+1) = G(s), \quad (12)$$

где $G(s)$ – заданная функция, l_0 – заданная постоянная.

Пусть V – модуль скорости, V_0 – значение V в невозмущенном потоке, g – ускорение силы тяжести, Γ – циркуляция скорости по контуру Λ . Считаем, что

$$\gamma = \frac{\Gamma}{2\pi V_0 H} = \gamma_0, \quad \text{Fr} = \frac{V_0^2}{gH} = f_0, \quad (13)$$

где Fr – число Фруда, γ_0, f_0 – заданные постоянные.

Согласно аппроксимации Киселева–Тумашева интеграл Бернулли для свободной поверхности Ω можно записать в виде

$$\ln V + vy = \ln V_0, \quad v = g/V_0^2, \quad z \in \Omega. \quad (14)$$

В плоскости $t = u + iv$ области G_z , занятой течением, соответствует область G_t – нижняя полуплоскость с удаленным из нее кругом

$$|t - t_0| < \frac{2r}{1 - r^2}, \quad t_0 = -i \frac{1 + r^2}{1 - r^2}, \quad (15)$$

где r – некоторая постоянная из интервала $(0, 1)$. Контур Λ в плоскости t отвечает окружность Λ_t , описываемая уравнением

$$t = t_0 + \frac{2r}{1 - r^2} e^{i\omega}, \quad \text{Im } \omega = 0, \quad (16)$$

а свободной поверхности Ω – прямая $\Omega_t = \{-\infty < u < \infty, v = 0\}$ (рис. 35б).

Функция $z(t)$, конформно отображающая G_t на G_z удовлетворит условиям

$$\text{Im } z(t) \rightarrow 0, \quad v = 0, \quad u \rightarrow -\infty, \quad (17)$$

$$\frac{dw}{dt} \rightarrow K, \quad u \rightarrow -\infty \text{ или } v \rightarrow -\infty, \quad (18)$$

$$\operatorname{Re}\left(\ln \frac{dz}{dt} + ivz\right) = \ln \left| \frac{dw}{dt} \right| - \ln V_0, \quad t \in \Omega_t. \quad (19)$$

Здесь K – положительная постоянная, имеющая размерность длины, w – комплексный потенциал. Условия (17), (18) отражают характер затухания возмущений, условие (19) эквивалентно (14).

Таким образом, задача сводится к отысканию комплексного потенциала $w(t)$ и отображающей функции $z(t)$, обеспечивающей выполнение условий (12), (13), (17) – (19).

Можно показать, что искомый комплексный потенциал течения $w(t)$ имеет вид

$$w = KV_0 \left(t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n t}{t^2 + \xi_n^2} - i\delta \ln \frac{t+i}{t-i} \right), \quad \delta = \frac{\Gamma}{2\pi KV_0}, \quad (20)$$

$$\xi_n = \frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}}, \quad A_n = \frac{8r^{2n}}{(1-r^{2n})^2}, \quad n=1, 2, \dots \quad (21)$$

При доказательстве (20) использованы конформные отображения

$$t = \frac{\varsigma+1}{\varsigma-1}i, \quad \varsigma = \frac{t+i}{t-i}, \quad (22)$$

которые дают соответствие между областью G_t и кольцом $r < |\varsigma| < 1$ (рис. 35б), при этом окружности Λ_t отвечает окружность $\varsigma = re^{i\sigma}$. При $t \in \Lambda_t$ можно установить связь между ω и σ и получить формулы для определения критических точек t_b и t_c на контуре Λ_t

$$t_c = t_0 + \frac{2r}{1-r^2}e^{i\omega_\beta}, \quad t_b = t_0 - \frac{2r}{1-r^2}e^{-i\omega_\beta}, \quad \omega_\beta = -\frac{\pi}{2} + \beta + 2\operatorname{arctg} \frac{r \sin \beta}{1-r \cos \beta}, \quad (23)$$

а также установить, что

$$H = K(1 + \delta \ln r) = \frac{K}{(1 - \gamma \ln r)}, \quad \delta = \frac{\gamma}{1 - \gamma \ln r}. \quad (24)$$

Согласно (20)

$$\frac{dw}{dt} = KV_0 P(t), \quad P(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\xi_n^2 - t^2}{(t^2 - \xi_n^2)^2} - \frac{2\delta}{1+t^2}.$$

Из (19) можно найти

$$\begin{aligned} vz = at + b - i \ln T(t), \quad \frac{dz}{dt} = KU(t), \quad U(t) = \frac{F(t)}{T(t)}, \\ a = vK = (1 - \gamma \ln r) / Fr, \end{aligned} \quad (25)$$

$$T(t) = 1 + ia e^{-iat} \int_{-\infty}^t e^{iat} (F(t) - 1) dt, \quad F(t) = P(t)Q(t)R(t),$$

$$Q(t) = \frac{(t - \bar{t}_b)(t - \bar{t}_c)(t - t_0)^2}{(t - t_b)(t - t_c)(t - \bar{t}_0)^2}, \quad R(t) = \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (t - t_0)^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n (t - \bar{t}_0)^{-n}}, \quad B_n = b_n + id_n,$$

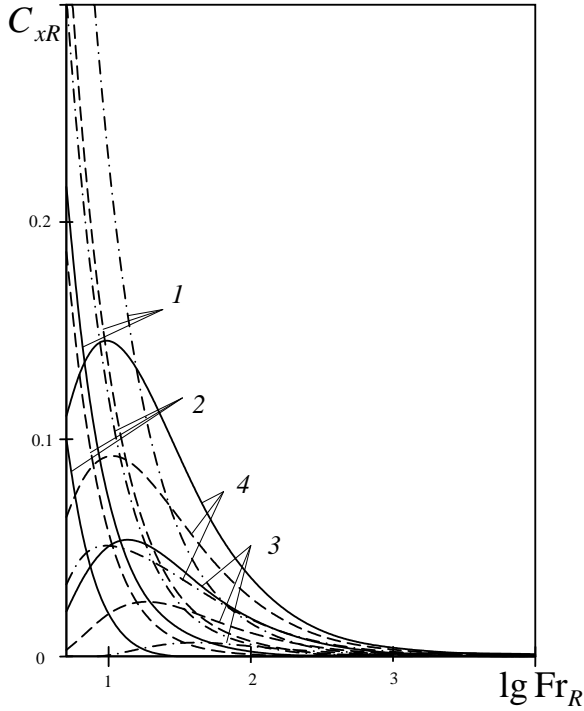


Рис. 36

где b_n, d_n – вещественные коэффициенты, b – произвольная вещественная постоянная.

Таким образом, задача (12) – (14) сводится к определению параметра r и коэффициентов b_n, d_n .

Параметры $\xi_n, A_n, t_0, t_b, t_c, \delta, a$, входящие в решение, выражаются через r, γ, Fr по формулам (15), (21), (23) – (25).

Положим $B_n = 0$ при $n \geq M$, где M – достаточно большое целое число, и введем обозначения:

$$\mu = \{r, \{\xi_n, A_n\}, t_0, t_b, t_c, \delta, a\},$$

$$\tau = \{b_1, b_2, \dots, b_{M-1}, d_1, d_2, \dots, d_{M-1}\}, \quad \text{где } \mu \text{ – это}$$

комплекс параметров, определяемых через r ; τ – вектор, состоящий из коэффициентов

b_n, d_n ($1 \leq n \leq M-1$).

Разделим окружность Λ_t на N частей ($N > 2M$) точками

$$t_j = t_0 + 2r \frac{\exp(i\omega_j)}{1 - r^2},$$

$$\omega_j = \frac{\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

и введем функционал

$$W = \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha_j - 2\pi s_j - G(s_j))^2,$$

$$\alpha_j = \alpha(\omega_j), \quad s_j = s(\omega_j).$$

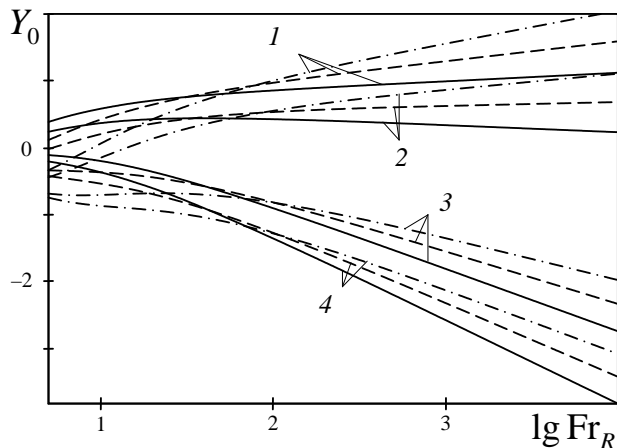


Рис. 37

Алгоритм решения задачи основан на методе последовательных итераций для определения μ и τ , который для τ включает минимизацию функционала W методом сопряженных градиентов при аналитическом виде производных. На рис. 36 – 38 представлены результаты расчетов, полученные при исследовании обтекания кругового цилиндра. При этом в

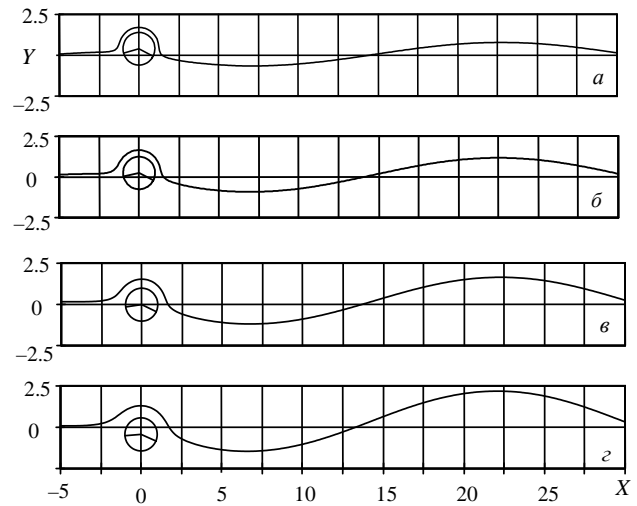


Рис. 38

качестве масштаба длины выбран радиус поперечного сечения цилиндра R и использованы обозначения: $H_R = H/R$, $Fr_R = Fr \cdot H_R$, $\gamma_R = \Gamma/(V_0 R)$,

$$C_{xR} = C_x H_R,$$

$$X = x/R, \quad Y = y/R,$$

$$Y_0 = y_0/R, \text{ где } y_0 -$$

ордината центра

круга. Зависимость

$$C_{xR}, Y_0 \text{ от } \lg Fr_R$$

($5 \leq Fr_R \leq 10^4$) для

некоторых значений

$$\gamma_R \text{ и } H_R \text{ показана на}$$

рис. 36, 37;

значениям

$$\gamma_R = -1.5; -1; 0.5; 1$$

отвечают кривые 1 –

4, значениям

$$H_R = 0.35; 0.5; 0.75$$

соответствуют сплошные, штриховые и штрих-пунктирные кривые. В рассматриваемом диапазоне изменения Fr_R и H_R

коэффициент волнового сопротивления C_{xR} при $\gamma_R < 0$ монотонно убывает с ростом Fr_R и уменьшением H_R , при $\gamma_R > 0$ зависимость

$C_{xR}(Fr_R)$ имеет максимум, значение которого растет с увеличением γ_R и

уменьшением H_R . Как видно из графиков на рис. 37, с ростом Fr_R

цилиндр неограниченно поднимается над свободной поверхностью при

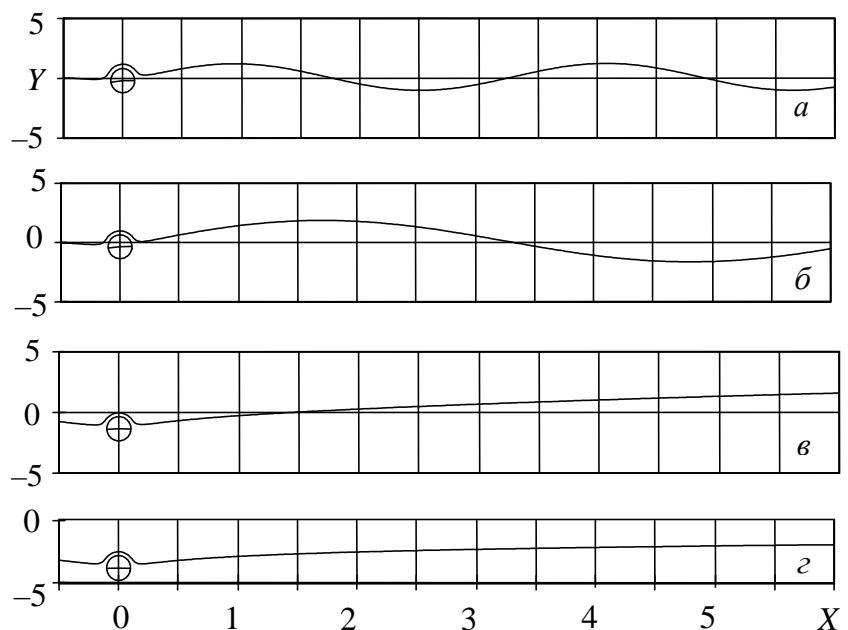


Рис. 39

$\gamma_R < 0$ и неограниченно опускается под нее при $\gamma_R > 0$. При больших значениях Fr_R зависимость $Y_0(\lg Fr_R)$ становится практически линейной. Характер зависимости $Y_0(H_R)$ для достаточно малых значений Fr_R противоположен тому, какой имеет место для достаточно больших значений Fr_R (переход происходит в некоторой окрестности точки $Fr_R=100$). На рис. 38 показана форма свободной поверхности и положение кругового цилиндра для $Fr_R=5$, $\gamma_R=-1$, вариантам *а, б, в, г* отвечают значения $H_R=0.25; 0.35; 0.5; 0.75$. Положение точек разветвления и схода потока отмечено с помощью соответствующих радиусов. Видно, что в рассмотренном диапазоне изменения H_R амплитуда волн возрастает с увеличением погружения цилиндра.

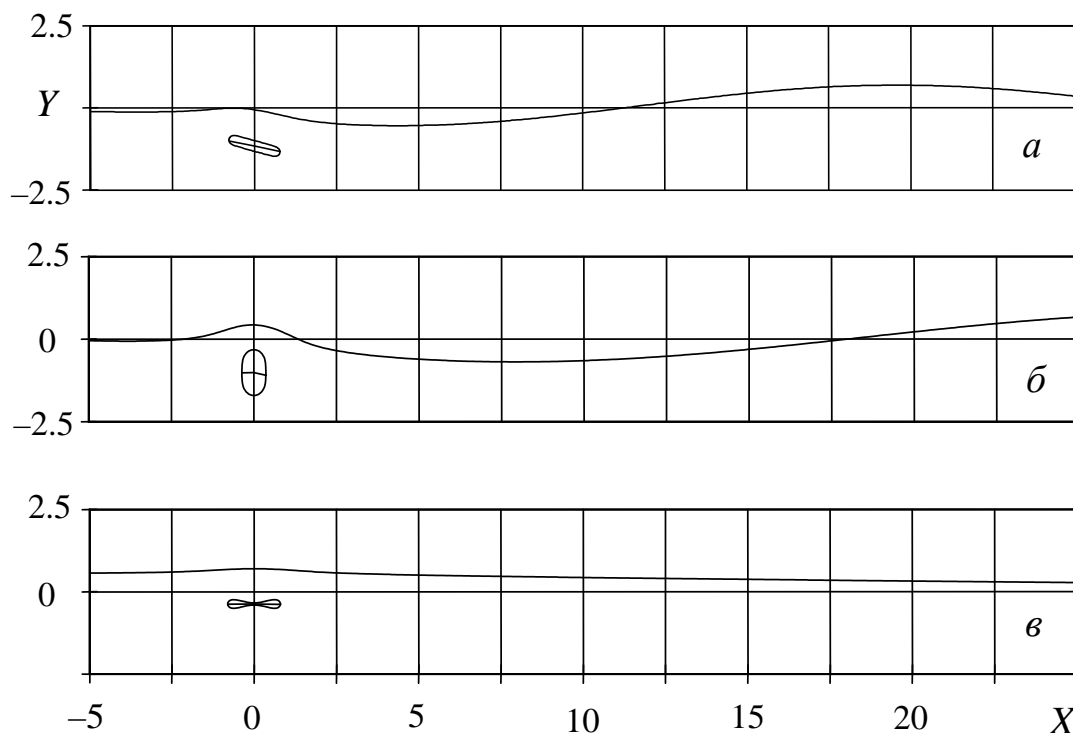


Рис. 40

На рис. 39 представлены картины течения при $\gamma_R=1$, $H_R=0.35$. Вариантам *а, б, в, г* отвечают $Fr_R=5, 10, 10^2, 10^4$. Видно, как с увеличением числа Фруда Fr_R понижается центр цилиндра, увеличивается длина волн и их амплитуда (крутизна волн убывает).

В §13 рассмотрены также примеры обтекания некруговых профилей с уравнением контура вида

$$\alpha = 2\pi s + a_0 + \sum_{k=1}^4 a_k \sin 4k\pi s. \quad (26)$$

Вид профиля и свободной поверхности для трех вариантов задания определяющих параметров показан на рис. 40 (здесь $X = x/H$, $Y = y/H$). Значения коэффициентов a_k (26) и параметров l_0 (12), γ_0 и f_0 (13) для вариантов a , b , $в$ приведены в таблице.

Следует отметить, что оба метода, представленные в §§12, 13, охватывают почти весь диапазон чисел Фруда.

Рис. 40	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	l_0	γ_0	f_0
a	0.27	-0.87	0.3	-0.09	0.016	3.5	-0.025	5
b	0	0.45	0	0	0	3.5	-0.025	7
$в$	0	-1.1	0.25	-0.09	0.02	3.5	-0.025	100

В приложении дано обобщение метода моделирования границ особенностями на пространственный случай обтекания подводной сферы на основе распределения простого слоя по свободной поверхности и применению теоремы Вейса для построения потенциала течения. Решение задачи сведено к решению интегрального уравнения для определения плотности простого слоя.

Публикации по теме диссертации

1. Филиппов С. И. Задача о движении круглого цилиндра под свободной поверхностью двухслойной жидкости // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987. – Вып. 23. – С. 226-230.
2. Филиппов С.И. Движение круглого цилиндра в потоке многослойной весомой жидкости //Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – Вып. 24. – С. 234-240.
3. Лотфуллин М.В., Филиппов С.И. Влияние внутренних волн на гидродинамические характеристики подводного крыла // Гидродинамика больших скоростей. – Чебоксары: Изд-во Чувашского гос. ун-та, 1990. – С. 61-70.
4. Лотфуллин М.В., Филиппов С.И. Поступательное движение крылового профиля в весомой жидкости при наличии двух границ раздела сред //

- Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1991. – Вып. 26. – С. 187-199.
5. Лотфуллин М.В., Филиппов С.И. Расчет поверхностных и внутренних волн при поступательном движении крылового профиля в весоной жидкости // Моделирование в механике. – Новосибирск, 1991. – Т. 5. – № 4. – С. 76-82.
 6. Лотфуллин М.В. Филиппов С.И. Моделирование границ раздела в задачах обтекания профиля крыла весоной жидкостью // ПМТФ. – 1992. – Т. 33. – № 4. – С. 84-89.
 7. Лотфуллин М.В., Филиппов С.И. Колебания плоского контура под свободной поверхностью весоной жидкости конечной глубины // Проблемы гидродинамики больших скоростей. – Чебоксары: Изд-во Чувашского гос. ун-та, 1993. – С. 184-193.
 8. Лотфуллин М.В., Стурова И.В., Филиппов С.И. Гидродинамическое воздействие на контур, обтекаемый равномерным потоком двухслойной жидкости // Вычислительные технологии. – Новосибирск, 1994. – Т. 3. – № 8. – С. 108-115.
 9. Филиппов С.И. Установившиеся колебания плоского контура вблизи границы раздела сред при наличии горизонтального дна // ПМТФ. – 1995. – Т. 36. – № 2. – С. 39-44.
 10. Филиппов С.И. Пульсирующий контур в канале с весоной жидкостью // Труды VI Всеросс. науч. школы “Гидродинамика больших скоростей”. – Чебоксары: Изд-во Чувашского гос. ун-та, 1996. – С. 190-195.
 11. Филиппов С.И. Контур, пульсирующий под свободной поверхностью над горизонтальным дном // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1997. – № 3. – С. 37-39.
 12. Филиппов С.И. Обтекание подводного профиля двухслойным потоком жидкости с различными скоростями слоев // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Унипресс, 1999. – Т. 3. – С. 54-59.
 13. Киселев О.М., Филиппов С.И. Движение подводного контура при больших числах Фруда и малом погружении // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Унипресс, 1999. – Т. 3. – С. 106-116.
 14. Киселев О.М., Филиппов С.И. О движение цилиндра под свободной поверхностью жидкости при больших числах Фруда // Изв. РАН. МЖГ. – 2000. – № 4. – С. 34-45.

- 15.Елизаров А.М., Лотфуллин М.В., Филиппов С.И. Развитие некоторых методов Г.Г. Тумашева в теории подводного крыла // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во ДАС, 2000. – Т 7. – С.130-141.
- 16.Филиппов С.И. Обтекание подводного профиля двухслойным потоком вязкой жидкости // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2000. – №3. – С. 27-30.
- 17.Елизаров А.М., Спиридонов О.А., Филиппов С.И. Обтекание подводного контура с образование капиллярно-гравитационных волн // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2001. – № 2. – С.15-17.
- 18.Филиппов С.И. Обтекание подводного крылового профиля // Изв. РАН. МЖГ. – 2001. – № 3. – С. 155-162.
- 19.Филиппов С.И. Моделирование капиллярно-гравитационных волн при циркуляционном обтекании подводного кругового цилиндра // Изв. РАЕН. МММИУ. – 2001. – Т. 5. – № 3. – С. 125-132.
- 20.Филиппов С.И. Краевая задача о циркуляционном обтекании подводного контура с образованием капиллярно-гравитационных волн //Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Казанское математическое общество, 2002. – Т. 14. – С. 274-280.
- 21.Филиппов С.И. К теории подводного крыла // На рубеже веков. Научно–исследовательский институт математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета, 1998–2002. – Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 2003. – С. 432-451.